《高等代数》（下）试卷

姓名---------------- 学号 ---------------- 评分-----------------

一. 填空题：18 分

1. 若把同构的子空间称作一类，则 n 维线性空间的共分_

____

2. 若 W_1, W_2 是 V 的两个有限维子空间，则 $\dim V_1+\dim V_2$

_____$\dim(V_1+V_2)$, 当且仅当 __________________时，取等号。

3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意三个向量线性无关，则由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 生成的子空间维数为____________________。

4. 在 R^3 中，线性变换 $\boldsymbol{A}$（$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$）=（$\alpha_1$， α_2， α_3）的特征根为--------------------。

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的三个特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，则

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$ ____________ ，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$ ___________ .

6. 下列矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 可对角化的是----------------------。

二．判断题：18 分 （在括号内打√ 或×）

1.实数 域 是复数域 上的线性空间(   )

2.若 V= L ($\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_S$),则 V 的每个基都与 $\alpha_1,\ldots, \alpha_S$ 等价 (   ).

3 设由 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到基 $\alpha_1,\ldots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 A,由基 β_1,

$\beta_2,\ldots,\beta_n$到基 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的过渡矩阵为B,则由基$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$到基$\beta_1,\ldots,\beta_n$的过渡矩阵为AB(　　)

4 线性变换 ***A*** 的特征向量之和,仍是 ***A*** 的特怔向量(　　)

5 两个 n 级矩阵相似的充要条件是它们有相同的特征多项式.(　　)

6.设V是数域 P上的n 维线性空间,若L(V) 的维数等于n^2,则L(V)同构于$P^{n\times n}$　　(　　)

三.计算题 30 分

1. 已知$W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in R\right\}, W_2=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \mid a_1,c_1\in R\right\}$,是$R^{2\times 2}$的两个子空间,求$W_1\cap W_2$, W_1+W_2的基与维数.

2. 在R^4中,α_1=（1，2，1，-1），α_2=（0，3，0，1），α_3=（3，5，1，2），α_4=（12，26，4，4）为一组基，求非零向量α，使α在单位基ε_1，ε_2，ε_3，ε_4下的坐标与在基α_1, α_2，α_3, α_4下坐标相同。

2. 在P^4中，求由 ：$3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0$　，$3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0$　，$3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0$确定的解空间的基和维数

4. 设线性变换 ***A*** 在基 ε_1，ε_2，ε_3 下的矩阵为 A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

求 ***A*** 的特征多项式，特征值，特征向量。

5.设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$求可逆矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角形，再由此求出

A^{10}

四．证明题： 34 分

1． 设 $V=\{(a_1,a_2,...,a_n)\mid a_i\in Q, i=\overline{1,n}\}$,

定义：$(a_1,a_2,...,a_n)\oplus(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$,

$k\circ(a_1,a_2,...,a_n)=(k^2a_1,k^2a_2,...,k^2a_n)$

证明：V 对上两个运算不构成 Q 上线性空间。（8 分）

2．设 A 为实对称矩阵，且 $A^3-3A^2+5A-3I=O$

（1）求 A 的特征值;

（2）证明 A 为正定矩阵． （16 分）

3 设 ***A*** 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，W 是 ***A*** 的不变子空间。

证明：若 ***A*** 可逆，则 W 也是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的不变子空间。（10 分）