数学本科《高等代数》（上）期末试题

一、 选择题（每题 3 分）

1 设数域 $P_1 \subset P_2$，多项式 $f(x) \in P_1[x]$，则（ ）

（1） $f(x)$ 在 P_1 上不可约当且仅当 $f(x)$ 在 P_2 上不可约；

（2） $f(x)$ 在 P_1 上无重因式当且仅当 $f(x)$ 在 P_2 上无重因式；

（3） $f(x)$ 在 P_1 上有根当且仅当 $f(x)$ 在 P_2 上有根；

（4） $f(x)$ 在 P_1 上有真因子当且仅当 $f(x)$ 在 P_2 上有真因子.

2．下列（ ）是 4 阶偶排列：

（A）4321　　（B）4123　　（C）1324　　（D）2341

3．下列矩阵不一定为方阵的是（ ）

（A）对称矩阵　　（B）可逆矩阵

（C） n 阶矩阵的转置矩阵　　（D）线性方程组的系数矩阵

4. 设 $r < s$，两个 n 维向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ (1) 和 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}$ (2)，下述正确的是( )

(1) 若(1)可由(2)线性表出，则(1)线性相关;

(2) 若(1)可由(2)线性表出，则(1)未必线性相关;

(3) 若(1)可由(2)线性表出，则当(2)线性无关时，(1)线性无关;

(4) 若(1)可由(2)线性表出，则仅当(2)线性相关时，(1)线性相关.

5. 设线性方程组 $AX = b$ 与线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 \quad + 2x_3 = 2 \\ (\lambda-1)(\lambda-2)x_3 = (\lambda-3)(\lambda-4) \end{cases}$ 同解. 则线性方程组 $AX = b$ 无解的充分且必要条件是（ ）

(1) $\lambda = 3$ 或 $\lambda = 1$;　　(2) $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$;

(3) $\lambda = 2$ 或 $\lambda = 4$;　　(4) $\lambda = 4$ 或 $\lambda = 1$.

6. 设矩阵 B 为 $r \times r$ 的, C 为 $r \times n$ 的且 $BC = 0$, 下述正确的是( )

(1) 当秩 $C = \min\{r, n\}$ 时, 必有 $B = 0$;

(2) (2)当秩 $C = \max\{r, n\}$ 时, 才有 $B = 0$;

(3) 当 C 的行向量组的极大线性无关组是唯一时，有 $B = 0$;

(4) 当 C 的列向量组的极大线性无关组是唯一时，有 $B = 0$.

二、 按要求计算下列各题

1. （8 分）设 $f(x)=x^3+2x^2+2x+1$， $g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$，

（1）在复数域上求它们的公共根；(2)求它们在有理数域、实数域和复数域上的标准分解式.

2. （9 分）计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+n-1 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n+n \end{vmatrix}$$

3. （10 分）a,b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

无解?有解?有解时, 求出由基础解系表示的全部解.

4. （10 分）求解矩阵方程 $XA=B$，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，

$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. （7 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求（1）$(A+B)(A-B)$，（2）$A^2-B^2$。

三、　证明下列各题

1. （9 分）设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，则 $p(x)$ 在复数域上没有重根.此命题的逆命题是否成立？为什么？

2. （10 分）假设向量 β 可以经向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，证明：表示法是唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。

3. （8 分）设矩阵 A 和 B 满足 $A^3=2E$， $B=A^2-2A+2E$. 证明 B 是可逆

的, 并用 A,E 表示 B^{-1}

4.（11分） 设 A 为 m 阶对称矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，证明：$B^{T}AB$ 为对称矩阵。.