《高等代数》(下)期末试卷

一、 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．实二次型$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.的矩阵为__________，秩为__________，正惯性指数为__________，规范形为__________.

2．已知$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a+b & c & 0 \\ 0 & b+c & 0 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in R \right\}$是$R^{3\times 3}$的一个子空间，则维（V）＝__________， V 的一组基是____________________.

3．设三级方阵A的三个特征值为 1、3、－2，矩阵B与A相似，则B的伴随矩阵B^*的三个特征值为__________.

4．设P^n是数域 P 上 n 维行向量空间，定义线性变换$\boldsymbol{\sigma}$：

$$\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

则线性变换σ的核$\sigma^{-1}(0)$＝__________，$\dim\sigma^{-1}(0)$＝__________.

5．设$A_{n\times n}, B_{m\times m}$均为正定矩阵，$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 则$M$ __________（正定或不正定）。

6．在$R[x]_4$中定义内积为$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$，则$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$的长度是__________.

二、判断题（每小题 2 分，共 16 分）

1．若 A 为正定矩阵，则必有$|A| > 0$. （ ）

2．设 W 是线性空间 V 的子空间，如果$\alpha, \beta \in V$，但$\alpha \notin W$且$\beta \notin W$则必有$\alpha + \beta \notin W$. （ ）

3.若线性空间 W 中任一向量都可由线性无关的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表出，则$\dim W = r$. （ ）

4．已知σ是线性空间 V 的一个线性变换，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$为 V 的一组基，则$\sigma\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_2, \cdots, \sigma\varepsilon_n$也为 V 的一组基. （ ）

5．在欧氏空间中（α,β)=0,且$\alpha\neq\theta$，则必$\beta=\theta$　　（　　）

6．复矩阵 A 与对角矩阵相似当且仅当它的不变因子全是一次的．　（　　）

7. 欧氏空间中 m 个向量$\alpha_1,\alpha,\cdots,\alpha_m$两两正交，则它们必线性无关．　（　　）

8．欧氏空间 V 上的对称变换在任一组基下的矩阵皆为对称矩阵．（　　）

三、计算与证明（共 60 分）

1．求一正交线性替换，化下列二次型为标准形．（15 分）

$$5x_1^2+x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3.$$

2．求复矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

的最小多项式、初等因子及若当标准形.　　　　（15 分）

3．设V 是定义在实数域上的函数构成的线性空间，令

$$W_1=\{f(x)\,|\,f(x)\in V, f(-x)=f(x)\},$$
$$W_2=\{f(x)\,|\,f(x)\in V, f(-x)=-f(x)\}$$　（10 分）

证明：W_1、W_2 皆为 V 的子空间，且$V=W_1\oplus W_2$.

4．已知σ是正交变换，证明：σ的不变子空间W的正交补$W^{\perp}$也是σ的不变子空间.　（10 分）

5．设 A 为 n 阶实对称矩阵，证明：A 可逆的充要条件是存在 n 阶实矩阵 B，使得矩阵$AB+B'A$正定．　（10 分）