《高等代数》课程期末试卷

_

一、完成下列计算（共 45 分）

1．已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

经正交线性替换 $X=TY$ 化成标准形

$$f=5y_1^2+5y_2^2+2y_3^2$$

（1）求参数 a 及二次型 f 的矩阵 A.

（2）求所用的正交线性替换 $X=TY$.(20 分)

2．已知 P^3 的线性变换

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)$$

（1）求值域 $\sigma(P^3)$ 的维数与一组基；

（2）求核 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数与一组基 .(12 分)

3．求复矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

的最小多项式、初等因子及若当标准形 .(13 分)

二、(15 分）设 A 为实对称矩阵，且 $A^3-3A^2+5A-3I=O$

（1）求 A 的特征值；

（2）证明 A 为正定矩阵.

三、（10 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维欧氏空间 V 的一组基，这组基的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

（1）令$\gamma=\alpha_1+\alpha_2$，证明γ是一个单位向量；

（2）若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_3$与$\gamma$正交，求$k$.

四、证明题（共 30 分）

1．设V是一个 n 维欧氏空间，$\alpha\neq 0$是 V 中一个固定向量，令

$$V_1=\{x|(x,\alpha)=0,x\in V\}$$

（1）证明V_1是V的一个子空间；

（2）证明V_1的维数等于$n-1$.(12 分)

2．设V是一个 n 维欧氏空间，σ是V的一个对称变换，证明：

（1）值域$\sigma(V)$与核$\sigma^{-1}(0)$都是σ的不变子空间；

（2）值域$\sigma(V)$是核$\sigma^{-1}(0)$的正交补.(12 分)

3．已知A为正交矩阵，证明A的伴随矩阵A^*也为正交矩阵.(6 分)