

第三学期高等代数（下）期末考试试题

一、填空题(每空 3 分共 15 分)

1. 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2x_3$ 的矩阵 $A = (\quad)$;

2. A 与 B 相似, 则 A 与 B () 等价

3. 设 $\sigma \in L(V(P))$, 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则 $\sigma\alpha_1, \dots, \sigma\alpha_n$ ()

4. λ -矩阵可逆, 则 () 满射

5. A 与 B 相似, 则 A 与 B () 合同

二、判断题(每题 2 分共 10 分) 对者划“√”, 错者划“×”

1. R^3 是 R^4 的子空间 ()

2. 设 $A, B \in P^{n \times n}$, 且 $r_A = r_B$ 则 A 与 B 是同一个线性变换 A 在不同基下的矩阵 ()

3. 设 $\sigma \in L(V(P))$, 且 σ 是满射, 则 σ 一定可逆 ()

4. 欧氏空间中的正交变换 σ 是自同构 $\Leftrightarrow \sigma$ 是满射 ()

5. 正交矩阵一定满秩 ()

三、选择题(每题 3 分共 12 分)

1. 下列集合对于所指定的线性运算, 构成实数域上线性空间的是 ()

- a. 全体满秩方阵对于通常矩阵的加法与数量乘法
- b. 全体反对称方阵对于通常矩阵的加法与数量乘法
- c. 平面上全体向量对于通常的加法及如下定义的数量乘法 $k\alpha = \theta$

d. 实数域上全体次数 $\leq n$ 的多项式及 0 多项式对于通常多项式的加法及数量乘法

2. 设 $\sigma \in L(V(P, n))$, 则下列结论不正确的是 ()

a. σ 是双射 b. σ 是单射 c. σ 是满射 d. 以上都不是

3. $\forall \alpha=(a_1, a_2), \beta=(b_1, b_2) \in R^2$, 则以下规则使 R^2 作成欧氏空间的是 ()

a. $(\alpha, \beta)=a_1(b_1+b_2)+a_2(b_1+2b_2)$

b. $(\alpha, \beta)=7a_1 b_1+2a_2 b_2$

c. $(\alpha, \beta)=a_1(b_1-b_2)-a_2(b_1-4b_2)$

d. $(\alpha, \beta)=2a_1 b_1-5a_2 b_2$

4. 设 $\lambda=2$ 是非零方阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\frac{1}{3}A^2$ 有一个特征值等于 ()

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

四、计算题 (每题 12 分, 共 24 分)

1. 在线性空间 F^4 中, 求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 0, 0, 0) \\ \alpha_2 = (0, 1, 0, 0) \\ \alpha_3 = (0, 0, 1, 0) \\ \alpha_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = (3, 1, -1, 1) \\ \beta_2 = (0, 3, 1, 0) \\ \beta_3 = (4, 3, 2, 1) \\ \beta_4 = (5, 6, 1, 3) \end{cases}$$

2. 用正交变换化实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

为标准形，写出正交变换 $\mathbf{X}=\mathbf{C}\mathbf{Y}$ ，并验证你的结果。

五、证明题（每题 13 分，共 39 分）

1. 设 W_1, W_2 均为 V 的子空间，且 $W_1 \subset W_2$ ，若 $\dim W_1 = \dim W_2$ ，

证明： $W_1 = W_2$

2. 证明线性变换 σ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

3. a. 试证欧氏空间 V 的正交变换 σ 必为单射

b. 当 $\dim V = n$ 时, σ 一定可逆对否? 并说明理由。