《高等代数》(下)期末试卷

一、 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．二次型 $(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$.的矩阵为__________，秩为__________，正惯性指数为__________，规范形为__________.

2．已知 $V=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ a+b & c & 0\\ 0 & b+c & 0\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in R\right\}$ 是 $R^{3\times 3}$ 的一个子空间，则维（V）

＝__________， V 的一组基是____________________.

3．设三级方阵 A 的三个特征值为 3、2、－2，矩阵 B 与 A 相似，则 B 的伴随矩阵 B^* 的三个特征值为__________.

4．设 P^n 是数域 P 上 n 维行向量空间，定义线性变换 σ：

$$\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$$

则线性变换 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ ＝ __________， $\dim\sigma^{-1}(0)$ ＝ __________.

5．已知 6 级λ－矩阵 A(λ)的各级行列式因子：

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=D_4(\lambda)=1,\quad D_5(\lambda)=\lambda(\lambda-1),\quad D_6(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^2$$

则 A(λ)的不变因子是为____________________.

6．在 $R[x]_4$ 中定义内积为 $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$，则 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$ 的长度是__________.

二、判断题（每小题 2 分，共 16 分）

1．若 A 为正定矩阵，则必有$|A|>0$．（　　）

2．设 W 是线性空间 V 的子空间，如果$\alpha,\beta\in V$，但$\alpha\notin W$且$\beta\notin W$则必有$\alpha+\beta\notin W$.（　　）

3．若线性空间 W 中任一向量都可由线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出，则$\dim W=r$.（　　）

4．已知σ是线性空间 V 的一个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为 V 的一组基，则$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n$也为 V 的一组基．（　　）

5．$n\times n$的λ－矩阵 A(λ)可逆$\Leftrightarrow$秩 A(λ)＝n．（　　）

6．复矩阵 A 与对角矩阵相似当且仅当它的不变因子全是一次的．（　　）

7．欧氏空间中 m 个向量$\alpha_1,\alpha,\cdots,\alpha_m$两两正交，则它们必线性无关．（　　）

8．欧氏空间 V 上的对称变换在任一组基下的矩阵皆为对称矩阵．（　　）

三、计算与证明（共 60 分）

1．设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$是 4 维欧氏空间$V$的标准正交基．将$V$的基

$\alpha_1=2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3$，$\alpha_2=2\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4$，$\alpha_3=\varepsilon_2-\varepsilon_3$，

$\alpha_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$

化成V的标准正交基。（15 分）

2．设$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ （15 分）

（1）求 A 的最小多项式；

（2）求 A 的初等因子；

（3）求 A 的若当标准形.

3．设V 是定义在实数域上的函数构成的线性空间，令

$$W_1=\{f(x)\,|\,f(x)\in V, f(-x)=f(x)\},$$
$$W_2=\{f(x)\,|\,f(x)\in V, f(-x)=-f(x)\}$$
（10 分）

证明：W_1、W_2 皆为 V 的子空间，且$V=W_1\oplus W_2$.

4．已知σ是正交变换，证明：σ 的不变子空间W的正交补$W^{\perp}$也是σ 的不变子空间。（10 分）

5．设σ,τ是 V 上的两个线性变换，证明：

$\mathrm{Im}(\sigma)=\mathrm{Im}(\tau)$的充要条件是$\sigma\tau=\tau,\tau\sigma=\sigma$；　（10 分）